

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES
(hoja 5 curso 07/08))

12. Decide si el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

13. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Estudia los autovalores de la matriz A .
2. ¿Es f diagonalizable?.
3. Calcula la matriz del endomorfismo f^{10} respecto de la base B .

14. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ referido a la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

1. (a) El vector $\vec{e}_3$ es vector propio del autovalor $\lambda = a - 3$, $a \in \mathbb{R}$
 $f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
 $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
2. Halla la matriz de f respecto de la base B .
3. Estudia los autovalores de f en función del parámetro a .
4. Obtén los valores de a para los cuales f es diagonalizable.
5. Para $a = 4$ halla una base de vectores propios y la matriz diagonal de f respecto de dicha base.

15. Sabiendo que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo diagonalizable tal que

1. (a) i. $W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$ son subespacios propios de f .
 ii. Los autovalores de f^{-1} son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad 1.

determina la matriz de f en la base canónica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

16. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$. Determina la matriz de f en la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sabiendo que:

1. (a) i. $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 0\}$ es un subespacio propio de f .
 ii. Dicha matriz es semejante a la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 iii. $f(e_1 + e_2) = 2e_1 + e_2 + e_3$

17. Se considera el espacio vectorial $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y el endomorfismo de V definido de la siguiente manera:

$$f \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2a + b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ (m+1)a + 2b + 2c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de $m \in \mathbb{R}$, el endomorfismo es diagonalizable?

18. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ referido a la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

1. (a) i. El núcleo de f es el subespacio de ecuaciones en B , $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
 ii. El subespacio generado por $\{\vec{e}_3\}$, es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$.
 iii. $f(e_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.
2. Obtén la expresión matricial de f respecto de la base B .
3. Razona si f es sobreyectiva.
4. Determina la expresión matricial de f respecto de la base $B' = \{\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2 - \vec{e}_3, 2\vec{e}_2\}$.

ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES
(hoja 6 curso 07/08))

19. En el espacio tridimensional V se considera el endomorfismo f de V y la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Sabiendo que la matriz de f respecto de la base $B' = \{\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_3\}$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Ecuaciones cartesianas de los subespacios propios de f respecto de la base B .
2. Matriz de f respecto de la base B .

20. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿ A y B son matrices semejantes?. Razona la respuesta.

21. Demuestra los siguientes enunciados:

1. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si f es biyectivo entonces todos sus autovalores son distintos de cero.
2. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si f es inyectivo entonces todos sus autovalores son distintos de cero.
3. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si f es sobreyectivo entonces todos sus autovalores son distintos de cero.
4. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si λ es autovalor de f entonces para $k \in \mathbb{R}$, $k\lambda$ es autovalor del endomorfismo kf .
5. Sea $f : V \longrightarrow V$ un automorfismo. Si λ es autovalor de f entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de f^{-1} .
6. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si λ es autovalor de f entonces λ^2 es autovalor del endomorfismo f^2 .

7. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si λ es autovalor de f entonces para $k \in \mathbb{R}$, $\lambda - k$ es autovalor del endomorfismo $f - ki$.
8. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si $\vec{v}$ es un vector propio de f asociado al valor propio λ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $\vec{v}$ es un vector propio del endomorfismo kf asociado al valor propio $k\lambda$.
9. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si $\vec{v}$ es un vector propio de f asociado al valor propio λ entonces $\vec{v}$ es vector propio del endomorfismo f^2 asociado al valor propio λ^2 .
10. Sean $f : V \longrightarrow V$ y $h : V \longrightarrow V$ endomorfismos. Si $\vec{v}$ es vector propio de ambos endomorfismos entonces es vector propio del endomorfismo $f - h$.